



Trigonométrie dans le triangle rectangle

0.Introduction :

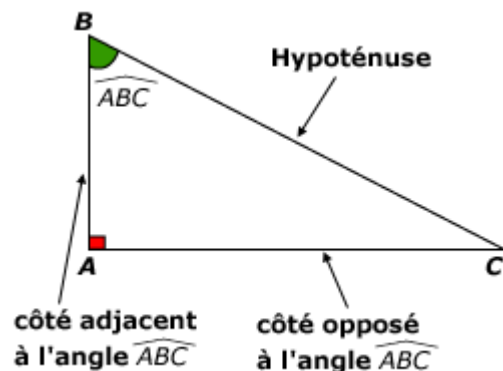
La trigonométrie est un domaine des mathématiques qui traite des relations entre les longueurs et les angles dans un triangle.

Le mot trigonométrie provient du grec **trigonos** qui signifie « **triangulaire** » et **métron** qui signifie « **mesure** ».

Les origines de la trigonométrie remontent aux civilisations d'Égypte antique, de Mésopotamie et de la vallée de l'Indus vers - 4 000.

I.Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu :

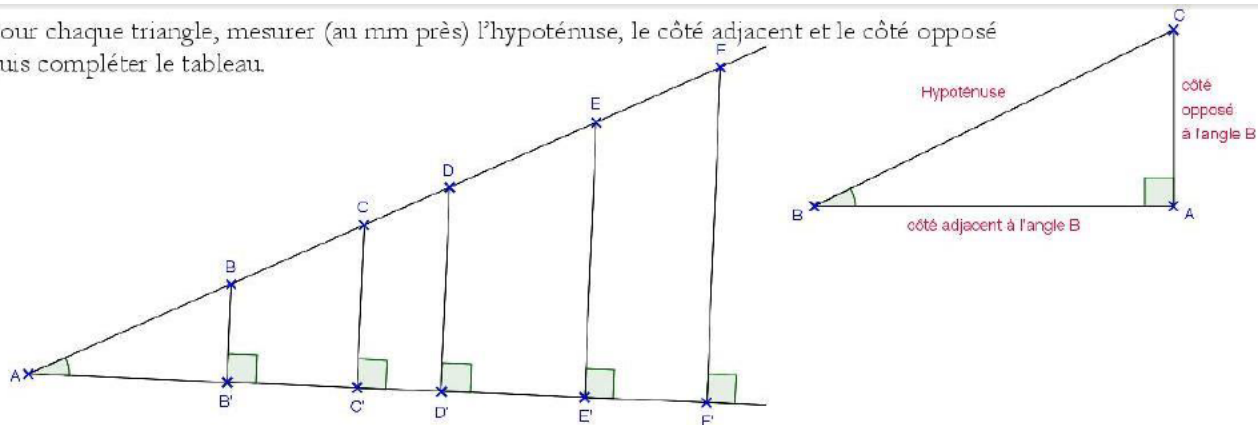
1.Vocabulaire



2. Formules de trigonométrie dans le triangle rectangle :

Activité de découverte des formules de trigonométrie :

Pour chaque triangle, mesurer (au mm près) l'hypoténuse, le côté adjacent et le côté opposé puis compléter le tableau.



Triangle	Hypoténuse	Côté adjacent	Côté opposé	$\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$	$\frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$	$\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$
ABB'						
ACC'						
ADD'						
AEE'						
AFF'						

Conclusion :

Dans tous les triangles, $\hat{A} \approx \dots\dots\dots$

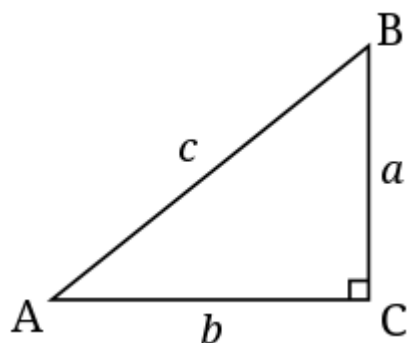
A l'aide d'une calculatrice, compléter : $\cos \hat{A} \approx \dots\dots\dots$ $\sin \hat{A} \approx \dots\dots\dots$ $\tan \hat{A} \approx \dots\dots\dots$

Conclusion : $\cos \hat{A} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$ $\sin \hat{A} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$ $\tan \hat{A} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$

Propriété :

Soit ABC un triangle rectangle en A. Dans un triangle rectangle, nous avons les formules de trigonométrie suivantes

$$\sin A = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{a}{c} \quad \cos A = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{b}{c} \quad \tan A = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{a}{b}$$

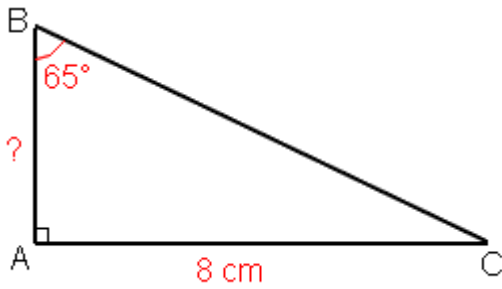


Moyen mnémotechnique : SOH-CAH-TOA

Exemple :

Soit ABC un triangle rectangle en A.

Calculer la valeur de AB arrondie au millimètre.



Dans le triangle ABC rectangle en A :

Je connais :

- $AC = 8 \text{ cm}$: côté **opposé** à l'angle $\widehat{B}$;
- $\widehat{B} = 65^\circ$

Je cherche :

AB : côté **adjacent** à l'angle $\widehat{B}$.

Formule : tangente

$$\tan(\widehat{B}) = \frac{AC}{AB}$$

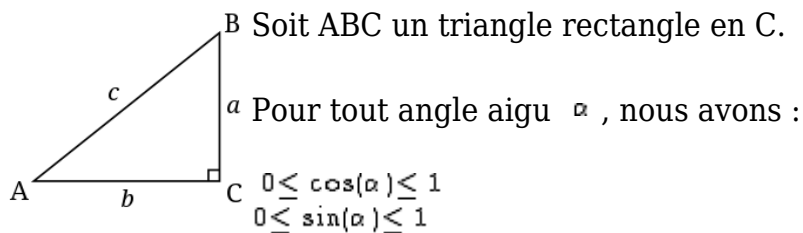
$$\frac{\tan(65^\circ)}{1} = \frac{8}{AB}$$

donc

$$AB = \frac{8 \times 1}{\tan(65^\circ)}$$

$$AB \approx 3,7 \text{ cm}$$

Propriété :



Preuve :

Le cosinus et le sinus sont des quotients de longueurs donc $\cos(\alpha) \geq 0$ et $\sin(\alpha) \geq 0$.

De plus $\cos(\alpha) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}} \leq \frac{\text{hypotenuse}}{\text{hypotenuse}} \leq 1$

De même, $\sin(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypotenuse}} \leq \frac{\text{hypotenuse}}{\text{hypotenuse}} \leq 1$

II. Calcul de la mesure d'un angle avec les formules de trigonométrie :

Activité de découverte :

1. A l'aide des touches $\cos$, $\sin$, $\tan$, $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$ et $\tan^{-1}$ de la calculatrice, compléter le tableau.

Angle	10°			50°		60°		70°	
cosinus		0,9					0,4		
sinus			0,36						0,9
tangente				1,3					

2. a) Dans le triangle rectangle LMN exprimer le cosinus, le sinus et la tangente des angles aigus.

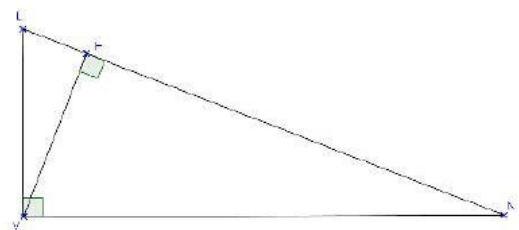
$$\cos \widehat{MLN} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \quad \sin \widehat{MLN} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \quad \tan \widehat{MLN} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$\cos \widehat{MNL} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \quad \sin \widehat{MNL} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \quad \tan \widehat{MNL} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

b) Dans le triangle rectangle MHN exprimer le cosinus, le sinus et la tangente des angles aigus.

$$\cos \widehat{NMH} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \quad \sin \widehat{NMH} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \quad \tan \widehat{NMH} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$\cos \widehat{MNH} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \quad \sin \widehat{MNH} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \quad \tan \widehat{MNH} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$



Règle :

Afin de calculer la mesure d'un angle dans un triangle rectangle (connaissant son cosinus ou sinus ou tangente), nous utilisons la calculatrice en mode **DEGRE (DEG)**. Les touches qui nous permettent de calculer la mesure de l'angle aigu sont : $\arccos$ ou $\cos^{-1}$; $\arcsin$ ou $\sin^{-1}$; $\arctan$ ou $\tan^{-1}$.

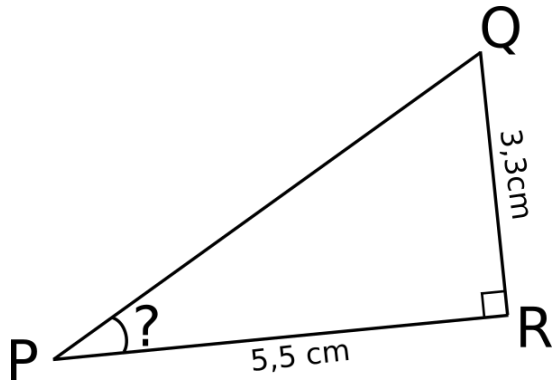
Exemples :

a. Si $\cos \alpha = 0,5$ alors $\alpha = \arccos(0,5) = 60^\circ$.

b. Si $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ alors $x = \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 45^\circ$.

c. Soit PQR un triangle rectangle en R.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{P}$ arrondie au degré.



Dans le triangle PQR rectangle en R :

Je connais :

- $PR=5,5$ cm : côté **adjacent** à $\widehat{P}$;
- $QR=3,3$ cm : côté **opposé** à $\widehat{P}$.

Je cherche :

- $\widehat{P}$

Formule : TANGENTE

$$\text{Tan}(\widehat{P}) = \frac{QR}{PR}$$

$$\text{Tan}(\widehat{P}) = \frac{3,3}{5,5}$$

$$\widehat{P} = \arctan\left(\frac{3,3}{5,5}\right)$$

$$\widehat{P} \approx 31^\circ$$