VIII- BARYCENTRE

Faire savoir

Le cours

1. Barycentre d'un système de deux points

Physiquement, on appelle barycentre G d'un ensemble de points pesants, le point d'équilibre de cet ensemble de points.

Mathématiquement, la notion est étendue à des coefficients qui peuvent être négatifs.

a) Point pondéré

Définition

Soit A un point du plan $\mathcal{P}$, et soit α un nombre réel. La notation $A(\alpha)$ ou $(A;\ \alpha)$ signifie que le point A est affecté du coefficient α, ou que le point pondéré A est affecté de la masse α.

Exemple 1

$(A,5)$; $(B,-3)$; $(C,2)$; $\left(D,-\frac{3}{4}\right)$; $(E,0)$; $\left(F,\sqrt{2}\right)$

Sont des points pondérés.

b) Barycentre de deux points

Définition

Soit A et B deux points du plan $\mathcal{P}$.

Et soit α et β deux nombres réels tels que ; $\alpha+\beta\neq 0$.

Il existe un point unique G vérifiant ;

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

Le point G est appelé barycentre des deux points A et B affectés respectivement des coefficients α et β.

On peut aussi dire que ; G est le barycentre du système des deux points pondérés ; $A(\alpha);B(\beta)$ ou $\{(A,\alpha);\ (B,\beta)\}$.

c) Propriété

Le point G est le barycentre de deux points A et B affectés respectivement des deux coefficients α et β si et seulement si ;

$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

d) Notations

G est barycentre de A et B affectés respectivement des deux coefficients α et β se note ;

$G=bar\{(A;\ \alpha),(B;\ \beta)\}$,

Ou encore ;

www.ipn.mr

$G = bar$

A	B
α	β

Exemple 2

$Soit\ G = bar$

A	B
3	2

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

e) Construction du barycentre G de deux points

Exercice

Montrer que ;

$G = bar$

A	B
α	β

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$$

Remarque

Dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB})$, le point G a pour abscisse ; $G\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)$.

Dans le repère $(B;\ \overrightarrow{BA})$, le point G a pour abscisse ; $G\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$.

Exemple 3

A et B sont deux points distincts.

Soit $F = bar$

A	B
5	7

Donner l'abscisse du point F dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB})$.

Solution

$F = bar$

A	B
5	7

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{7}{5+7}\overrightarrow{AB} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AB} \Rightarrow F\left(\frac{7}{12}\right)$$

Exemple 4

A et B sont deux points distincts.

Donner les abscisses des points E, F et G dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB})$, sachant que ;

$E = bar$

A	B
4	5

$F = bar$

A	B
-10	-6

$G = bar$

A	B

www.ipn.mr

-8	1

Solution

$E = bar$

A	B
4	5

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{5}{9}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \boldsymbol{E\left(\frac{5}{9}\right)}$

$F = bar$

A	B
-10	-6

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{-6}{-16}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \boldsymbol{F\left(\frac{3}{8}\right)}$

$G = bar$

A	B
-8	1

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{-7}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \boldsymbol{G\left(-\frac{1}{7}\right)}$

Exemple 5

A et B sont deux points distincts.

Donner les abscisses des points F, G et H dans le repère $\left(A;\ \overrightarrow{AB}\right)$, tels que ;

$F = bar$

A	B
3	2

$G = bar$

A	B
-5	4

$H = bar$

A	B
11	-6

Solution

$F = bar$

A	B
3	2

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow F\left(\frac{2}{5}\right)$

$G = bar$

A	B
-5	4

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{4}{-1}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow G(-4)$

$H = bar$

A	B
11	-6

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{-6}{5}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow H\left(-\frac{6}{5}\right)$

f) Méthodes de construction du barycentre de deux points

www.ipn.mr

a- Méthode de l'abscisse

$G = bar$ | A | B |
|---|---|
| α | β |

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

$$\Longrightarrow G \in (AB), \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$

$$G\ a\ pour\ abscisse\ \frac{\beta}{\alpha+\beta}\ dans\ le\ repère\ \left(A;\ \overrightarrow{AB}\right)$$

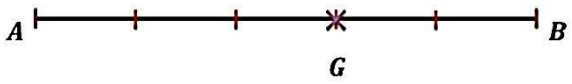
Exemple 6

Construisons le point $G = bar$

A	B
2	3

Solution

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{3}{2+3}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$



b- Méthode du parallélogramme

Soit $G = bar$

A	B
α	β

et soit P un point du plan $\mathcal{P}$ tel que ; $P \notin (AB)$ on définit les points P_1 et P_2 par ;

$$\overrightarrow{PP_1} = \alpha\overrightarrow{PA}\ et\ \overrightarrow{PP_2} = \beta\overrightarrow{PB}$$

Soit S le point tel que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2}$ et PP_1SP_2 est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{PS} = \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{PG} \Longrightarrow G \in (PS)$$

Or, $G \in (AB) \Longrightarrow G = (AB) \cap (PS)$

Exemple 7

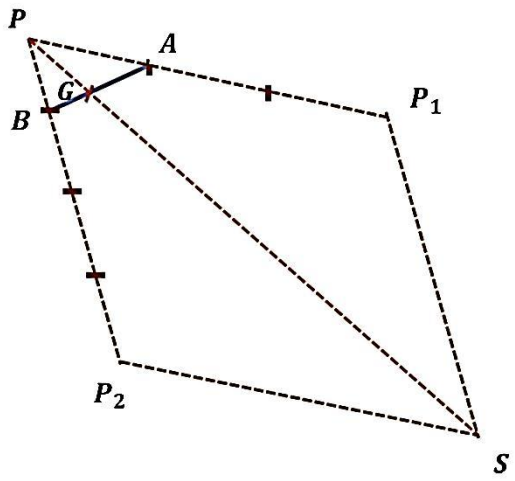
En utilisant la méthode du parallélogramme, construire le point ;

$G = bar$

A	B
3	4

Solution

www.ipi.mr



Exemple 8

Soit [AB] un segment.

1) Construire le point G = bar $\begin{matrix}A & B\\ 3 & 2\end{matrix}$

2) « **Méthode du parallélogramme** »

Soit P un point non situé sur la droite (AB). P_1 et P_2 les points tels que : $\overrightarrow{PP_1}=3\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PP_2}=2\overrightarrow{PB}$.

S le point tel que PP_1SP_2 est un parallélogramme.

Montrer que G est le point d'intersection des droites (AB) et (PS).

Solution

1) G = bar $\begin{matrix}A & B\\ 3 & 2\end{matrix}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

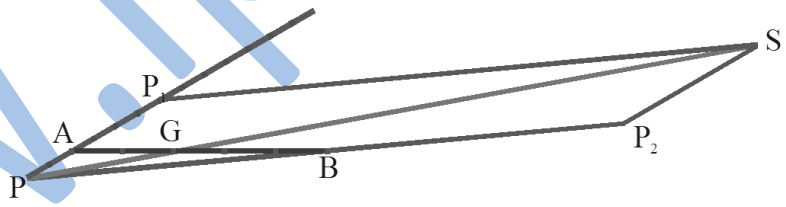


2) G = bar $\begin{matrix}A & B\\ 3 & 2\end{matrix}$; Donc G ∈ (AB).

Or, $\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}=3\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}=5\overrightarrow{PG}$.

Donc, le point G ∈ (PS).

D'où G est le point d'intersection des droites (AB) et (PS).



c- Méthode des parallèles

Cette méthode consiste à ;

- Tracer le segment $[AB]$,
- Choisir un vecteur unité $\vec{u}$,
- Sur les droites $d_1(A,\vec{u})$ et $d_2(B,\vec{u})$, tracer les deux vecteurs $\beta\vec{u}$ et $-\alpha\vec{u}$ respectivement à partir des points A et B,
- Joindre les deux extrémités des deux vecteurs $-\alpha\vec{u}$ et $\beta\vec{v}$, soit P_1 et P_2 leurs extrémités respectives.

Le point de concours des deux droites (AB) et (P_1P_2) est le point G barycentre du système

Justification

Construisons le point $G = bar$

A	B
α	β

Sur les droites parallèles $d_1(A,\vec{u})$ et $d_2(B,\vec{u})$,

www.ipn.mr

construisons les points P_1 et P_2 définis par ;

$$\overrightarrow{AP_1} = \beta\vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{\beta}\overrightarrow{AP_1} \ \boxed{1}$$

$$\overrightarrow{BP_2} = -\alpha\vec{u} \Rightarrow \vec{u} = -\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{BP_2} \ \boxed{2}$$

$$\boxed{1} = \boxed{2} \Rightarrow \frac{1}{\beta}\overrightarrow{AP_1} = -\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{BP_2} \Rightarrow \alpha\overrightarrow{AP_1} = -\beta\overrightarrow{BP_2}$$

$$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{AP_1} + \beta\overrightarrow{BP_2} = \vec{0}.$$

$$\Rightarrow \alpha\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP_1}\right) + \beta\left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GP_2}\right) = \vec{0}.$$

$$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{AG} + \alpha\overrightarrow{GP_1} + \beta\overrightarrow{BG} + \beta\overrightarrow{GP_2} = \vec{0}.$$

Comme ; $\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{BG} = \vec{0}$,

$$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{GP_1} + \beta\overrightarrow{GP_2} = \vec{0}.$$

$\Rightarrow G = bar$

P_1	P_2
α	β

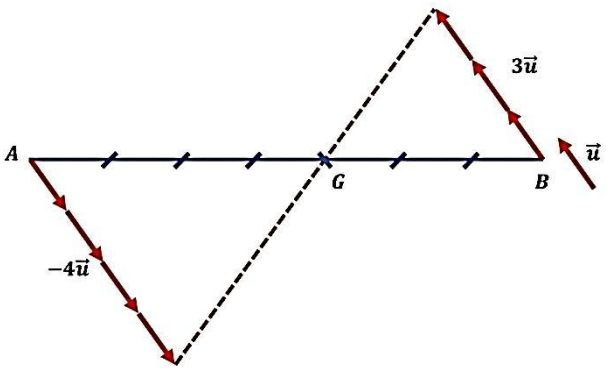
$$\Rightarrow G \in (P_1P_2) \Rightarrow G = (AB) \cap (P_1P_2).$$

Exemple 9

Construire le point $G = bar$

A	B
3	4

Solution



g) Existence et unicité de G

Le point $G = bar$

A	B
α	β

existe si, et seulement si ; $\alpha + \beta \neq 0$.

La relation ; $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ établit l'existence et l'unicité de G.

h) Lien vectoriel du barycentre G de deux points

L'égalité $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ implique que $G \in (AB)$

$G = bar$

A	B

$\Leftrightarrow G, A \text{ et } B \text{ sont alignés}$

www.ion.mr

α	β

$\Leftrightarrow G \in (AB)$

i) L'ensemble des barycentres de A et B génère la droite (AB).

Soit A et B deux points distincts ; la droite (AB) est l'ensemble des barycentres des deux points A et B.

Autrement dit ; $\forall\, M \in (AB)$ ils existent deux réels α et β tels que ;

$M = bar$ | A | B | Avec, $\alpha + \beta \neq 0$
|---|---|
| α | β |

Exercice

Démontrer la propriété précédente.

Remarque

Pour montrer que trois points sont alignés, il suffit de montrer que l'un d'eux peut s'exprimer comme barycentre des deux autres.

on a	***Si, et seulement si***
$\alpha = 0$	$G = B$
$\beta = 0$	$G = A$
$\alpha\beta > 0$ (*α et β sont de même signe*)	$G \in [AB] \setminus \{A, B\}$
$\alpha\beta < 0$ (*α et β sont de signes contraires*)	$G \in (AB) \setminus [AB]$
$\alpha\beta < 0$ $(\lvert\alpha\rvert > \lvert\beta\rvert)$	$G \in [BA) \setminus]AB[$
$\alpha\beta < 0$ $(\lvert\alpha\rvert < \lvert\beta\rvert)$	$G \in [AB) \setminus]AB[$

Remarques

- Si $G = bar$ | A | B |
|---|---|
| α | β |

Avec $\alpha > \beta > 0$, alors ; G est plus proche de A que de B.

- Si $G = bar$ | A | B |
|---|---|
| α | β |

Avec $\beta > \alpha > 0$, alors ; G est plus proche de B que de A.

j) Opérations conservant le barycentre G

Théorème de l'homogénéité (*Proportionnalité du barycentre*)

En multipliant ou en divisant les coefficients α et β par un même nombre réel non nul k, le barycentre G est conservé ;

$G = bar$ | A | B |
|---|---|
| α | β |

www.ipn.mr

$\Leftrightarrow G = bar$ $\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline k.\alpha & k.\beta \\ \hline \end{array}$ **1**

$\Leftrightarrow G = bar$ $\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \frac{\alpha}{k} & \frac{\beta}{k} \\ \hline \end{array}$ **2**

Exercice

Démontrer les propriétés précédentes.

Exemple 10

$G = bar$ $\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array}$ $= bar$ $\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 9 & 6 \\ \hline \end{array}$ $= bar$ $\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \hline \end{array}$

Propriété

$G = bar$ $\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$ $= bar$ $\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha' & \beta' \\ \hline \end{array}$ $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$

$\Leftrightarrow \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta}$.

Exercice

Démontrer la propriété précédente

Propriété 2

$G = bar$ $\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$

$\Leftrightarrow A = bar$ $\begin{array}{|c|c|}\hline G & B \\ \hline \alpha+\beta & -\beta \\ \hline \end{array}$

$\Leftrightarrow B = bar$ $\begin{array}{|c|c|}\hline G & A \\ \hline \alpha+\beta & -\alpha \\ \hline \end{array}$

Exercice

Démontrer la propriété précédente.

k) Isobarycentre de deux points

On définit l'isobarycentre de deux points comme le barycentre de deux points affectés du même coefficient non nul, c'est –à-dire ;

$G = bar$ $\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \alpha \\ \hline \end{array}$; $\alpha \neq 0$

www.ipn.mr

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\alpha}{2\alpha}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow G = A * B$

G est isobarycentre de A et B si, et seulement si ;

$G = bar$	A	B		$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$
1	1	

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow G$ *est le milieu de* $[AB]$

$I = bar$

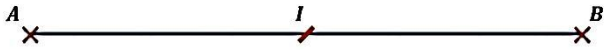
A	B
1	1

$[AB]$ a pour milieu $I \Leftrightarrow$ $A = bar$

I	B
2	-1

$B = bar$

I	A
2	-1



Exercice

Démontrer la propriété précédente

l) Fonction vectorielle de Leibniz

Soit A et B deux points du plan $\mathcal{P}$, et soit α et β deux nombres réels.

Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, on définit la fonction ; $\overrightarrow{f(M)} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$ appelée fonction vectorielle de Leibniz, associée au système de points pondérés ; $\{(A,\alpha);\ (B,\beta)\}$.

Si	***Alors***
$\alpha + \beta \neq 0$	$\overrightarrow{f(M)} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$ Avec $G = bar\{(A,\alpha);\ (B,\beta)\}$
$\alpha + \beta = 0$	$\overrightarrow{f(M)} = -\alpha\overrightarrow{AB}$ f est constante ; (indépendante de M)

m) La projection conserve le barycentre

La projection conserve le barycentre ; c'est-à-dire ;

Si $G = bar$

A	B
α	β

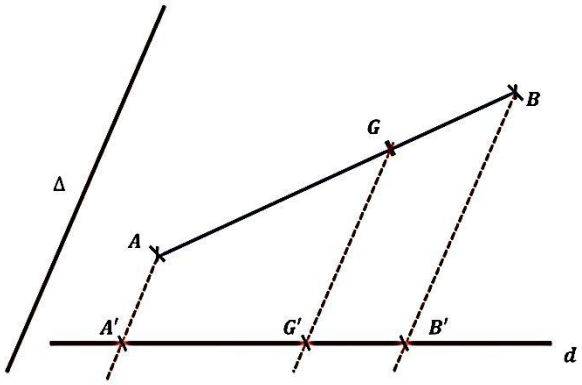
Et A', B' et G' sont les projetés respectifs de A, B et G. Sur la droite (d) parallèlement à (Δ).

Alors ; $G' = bar$

A'	B'

www.ip.mr

	α	β



n) Caractérisation du barycentre

Propriété

Soit (A,α) et (B,β) deux points pondérés tels que $\alpha+\beta\neq 0$ et G est le barycentre du système $\{(A,\alpha);\ (B,\beta)\}$.

Alors pour tout point M du plan $\mathcal{P}$ on a ;

$(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$, que l'on peut écrire ;

$$\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{MB}$$

Exercice

Démontrer la propriété précédente.

2. Barycentre d'un système de trois points

Définition

Soit A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$.

Et soit α, β et γ trois nombres réels tels que ; $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

Il existe un point unique G vérifiant ;

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

Le point G est appelé barycentre des trois points A, B et C affectés respectivement des trois coefficients α, β et γ.

a) Propriété

Le point G est le barycentre des trois points A, B et C affectés respectivement des trois coefficients α, β et γ si et seulement si ;

$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Remarque

On peut aussi dire que ; G est le barycentre du système de points pondérés $A(\alpha);B(\beta);C(\gamma)$ ou $\{(A,\alpha);\ (B,\beta);\ (C,\gamma)\}$.

b) Notations

G est barycentre du système (A,α) ; (B,β) et (C,γ) se note ;

www.ipn.mr

$G = bar\{(A;\ \alpha), (B;\ \beta), (C;\ \gamma)\},$

Ou encore ;

$G = bar$

A	B	C
α	β	γ

Exemple 11

$Soit\ G = bar$

A	B	C
8	4	-5

$\Leftrightarrow 8\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} - 5\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$

c) Comment construire le barycentre G de trois points

a- Méthode des coordonnées

$G = bar$

A	B	C
α	β	γ

$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BA} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CB}$$

Exemple 12

ABC est un triangle non aplati.

En utilisant la méthode des coordonnées, construire les points E et F tels que ;

$E = bar$

A	B	C
3	2	1

$F = bar$

A	B	C
-2	3	1

Solution

$E = bar$

A	B	C
3	2	1

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

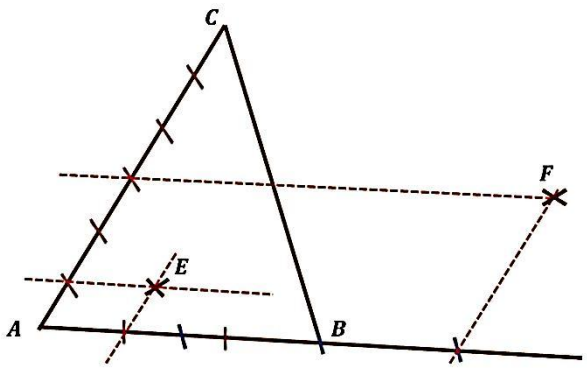
$F = bar$

A	B	C
-2	3	1

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Construction

www.ipn.mr



Exercice

Démontrer les propriétés précédentes.

Remarque

Dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, G a pour coordonnées ;

$$G\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$

b- Méthode du barycentre partiel

(*Associativité du barycentre*)

G est conservé lorsqu'on remplace deux points par leur barycentre affecté de la somme de leurs coefficients.

$G = bar$ | A | B | C | | α | β | γ | $\Leftrightarrow G = bar$ | H | C | | $\alpha+\beta$ | γ |

$Avec\ \alpha+\beta \neq 0\ et\ H = bar$ | A | B | | α | β |

Exemple 13

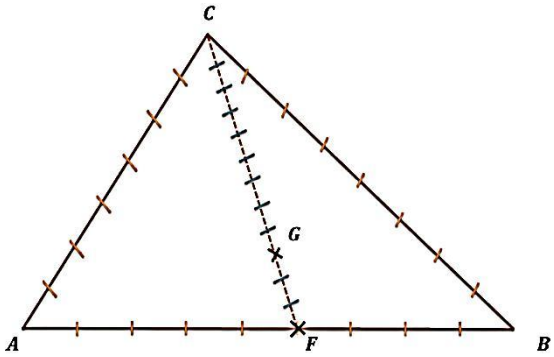
Soit $G = bar$ | A | B | C | | 4 | 5 | 3 |

Construire le barycentre G.

Solution

Soit $F = bar$ | A | B | | 4 | 5 | $\Rightarrow G = bar$ | F | C | | 9 | 3 |

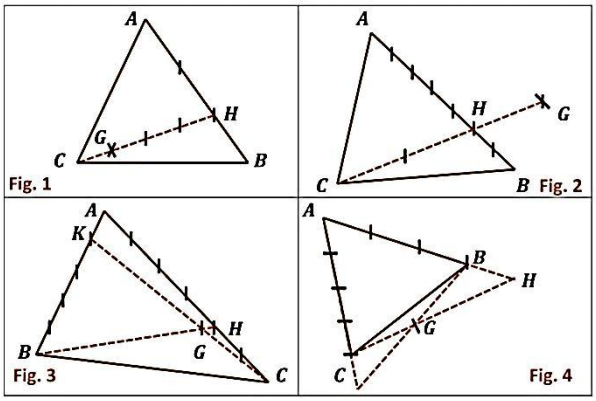
www.ipn.mr



c- Savoir reconnaître un barycentre de trois points

Exemple 14

Etant donné les figures suivantes, exprimer G comme barycentre de A, B et C.



Solution

Fig. 1 :

$H = bar$ | A | B | et $G = bar$ | C | H |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | | 3 | 1 |

$\Longrightarrow G = bar$ | C | H | $\Longrightarrow \boldsymbol{G = bar}$ | $\boldsymbol{A}$ | $\boldsymbol{B}$ | $\boldsymbol{C}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 9 | 3 | | **1** | **2** | **9** |

Fig. 2 :

$H = bar$	A	B	et $G = bar$	C	H	$\Longrightarrow$
	2	5		$\frac{-7}{3}$	7	

$G = bar$ | A | B | C | $\Longrightarrow \boldsymbol{G = bar}$ | $\boldsymbol{A}$ | $\boldsymbol{B}$ | $\boldsymbol{C}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 5 | $\frac{-7}{3}$ | | **6** | **15** | $\boldsymbol{-7}$ |

Fig. 3 :

$H = bar$ | A | C | et $K = bar$ | A | B |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 4 | | 4 | 1 |

www.i

$\Longrightarrow G = bar$ | B | H | | C | K |
|---|---|---|---|---|
| β | 6 | | γ | 5 |

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\beta}{1} = \frac{4}{\gamma} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\beta = \frac{1}{2}}} \ et \ \boxed{\boldsymbol{\gamma = 8}}$$

$\Longrightarrow G = bar$ | A | B | C | | A | B | C |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | $\frac{1}{2}$ | 8 | | 4 | 1 | 16 |

$\Longrightarrow \boldsymbol{G = bar}$ | $\boldsymbol{A}$ | $\boldsymbol{B}$ | $\boldsymbol{C}$ |
|---|---|---|
| $\mathbf{4}$ | $\mathbf{1}$ | $\mathbf{16}$ |

Fig. 4 :

$K = bar$	A	C	et $H = bar$	A	B
-1	5		-1	4

$\Longrightarrow G = bar$ | B | K | | C | H |
|---|---|---|---|---|
| β | 4 | | γ | 3 |

$$\Longrightarrow 1 = \frac{\beta}{4} = \frac{5}{\gamma} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\beta = 4}} \ et \ \boxed{\boldsymbol{\gamma = 5}}$$

$\Longrightarrow \boldsymbol{G = bar}$ | $\boldsymbol{A}$ | $\boldsymbol{B}$ | $\boldsymbol{C}$ |
|---|---|---|
| $\mathbf{-1}$ | $\mathbf{4}$ | $\mathbf{5}$ |

d) Existence et unicité de G

Le point $G = bar$ | A | B | C |
|---|---|---|
| α | β | γ |

existe si, et seulement si ; $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

L'égalité ;

$$\overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{CB}$$

Etablit l'existence et l'unicité du barycentre G.

e) Lien vectoriel du barycentre G de trois points

$G = bar$	A	B	C
α	β	γ

$(\alpha + \beta + \gamma \neq 0)$

$\Leftrightarrow G, A, B \ et \ C \ sont \ coplanaire \Leftrightarrow G \in (ABC)$

on a	***Si, et seulement si***

www.ipn.mr

$\alpha = \beta = 0$		$G = C$
$\alpha = \gamma = 0$		$G = B$
$\beta = \gamma = 0$		$G = A$
$\alpha = 0$		$G \in (BC)$
$\beta = 0$		$G \in (AC)$
$\gamma = 0$		$G \in (AB)$
ABC un triangle non aplati	$\alpha + \beta = 0$	G appartient à la parallèle à (AB)passant par C
	$\alpha + \gamma = 0$	G appartient à la parallèle à (AC)passant par B
	$\beta + \gamma = 0$	G appartient à la parallèle à (BC)passant par A
	α, β et γ du Même signe	G est à l'intérieur du triangle ABC
	Deux seulement de α, β et γ sont du même signe	G est à l'extérieur du triangle ABC

f) Opérations conservant le barycentre G

Théorème de l'homogénéité (*Proportionnalité du barycentre*)

En multipliant ou en divisant les coefficients α, β et γ par un même nombre réel non nul k, le centre de gravité G est conservé ;

$G = bar$

A	B	C
α	β	γ

$\Leftrightarrow G = bar$

A	B	C
$k.\alpha$	$k.\beta$	$k.\gamma$

$\Leftrightarrow G = bar$

A	B	C
$\frac{\alpha}{k}$	$\frac{\beta}{k}$	$\frac{\gamma}{k}$

Exercice

Démontrer cette propriété.

www.ipn.mr

Propriété 1

bar $\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array}$ $= bar$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \hline \end{array}$ avec

$$(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0) \Leftrightarrow \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma}$$

Exercice

Démontrer cette propriété.

Propriété 2

$G = bar$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array}$

$\Leftrightarrow A = bar$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline G & B & C \\ \hline \alpha+\beta+\gamma & -\beta & -\gamma \\ \hline \end{array}$

$\Leftrightarrow B = bar$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline G & A & C \\ \hline \alpha+\beta+\gamma & -\alpha & -\gamma \\ \hline \end{array}$

$\Leftrightarrow C = bar$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline G & A & B \\ \hline \alpha+\beta+\gamma & -\alpha & -\beta \\ \hline \end{array}$

g) L'ensemble des barycentre de trois points non alignés A, B et C, génère le plan (ABC).

Soit A, B et C trois points distincts et non alignés ; le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres des trois points A, B et C.

Autrement dit ; $\forall\, M \in (ABC)$ ils existent trois réels α, β et γ tels que ;

$M = bar$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array}$ Avec, $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

Exercice

Démontrer cette propriété.

h) Caractérisation du barycentre de trois points

a- Propriété

Soit (A, α), (B, β) et (C, γ)trois points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et G le barycentre du système ; $\{(A, \alpha);\ (B, \beta);\ (C, \gamma)\}$.

Alors pour tout point M du plan $\mathcal{P}$ on a ;

$(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$, que l'on peut écrire ;

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{(\alpha+\beta+\gamma)}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{(\alpha+\beta+\gamma)}\overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MC}$$

Exercice

www.ipn.mr

Démontrer cette propriété.

Exemple 15

Soit $G = bar$

A	B	C
2	-3	4

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$$

i) Isobarycentre de trois points

Définition

$G = bar$

A	B	C
α	α	α

avec ; $\alpha \neq 0$

Alors, G est appelé isobarycentre des points A, B et C, appelé aussi centre de gravité du triangle ABC.

a- Propriété

G est centre de gravité de ABC si, et seulement si ;

$G = bar$

A	B	C
1	1	1

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} \Leftrightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$$

Tel que ; $A' = B * C$, $B' = A * C$, $C' = A * B$.

$\Leftrightarrow G = bar$

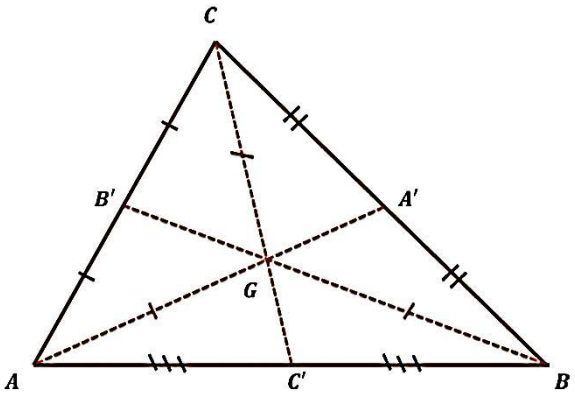
A	A'
1	2

$= bar$

B	B'
1	2

$= bar$

C	C'
1	2



j) Fonction vectorielle de Leibniz

Soit A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$, et soit α, β et γ trois nombres réels.

Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, on définit la fonction ; $\overrightarrow{f(M)} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ appelée fonction vectorielle de Leibniz, associée au système de points pondérés ; $\{(A,\alpha);\ (B,\beta);\ (C,\gamma)\}$.

Si	***Alors***
$\alpha + \beta + \gamma \neq 0$	$\overrightarrow{f(M)} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$, avec $G = bar\{(A,\alpha);\ (B,\beta);\ (C,\gamma)\}$
$\alpha + \beta + \gamma = 0$	$\overrightarrow{f(M)} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$

www.ipn.mr

	$= \alpha\overrightarrow{BA} + \gamma\overrightarrow{BC}$ $= \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$ f est constante ; (indépendante de M)

Exemple 16

ABC un triangle; I = bar $\begin{matrix}A & B\\ 1 & 2\end{matrix}$ $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

Les droites (IC) et (JA) se coupent en G.

Les droites (BG) et (AC) se coupent en K.

1) Faire une figure.

2) a) Déterminer des réels α ;β ; γ tels que G = bar $\begin{matrix}A & B & C\\ \alpha & \beta & \gamma\end{matrix}$

b) Déterminer α_1 ;β_1 ; γ_1 tels que G = bar $\begin{matrix}A & B & C\\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\end{matrix}$ et $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 1$.

3) Déterminer la position du point K sur la droite (AC).

4) Déterminer et construire les ensembles :

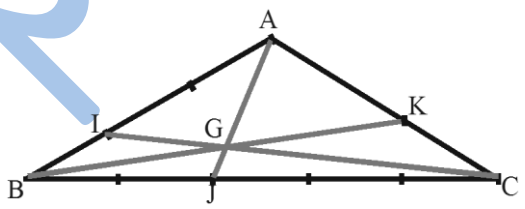
a) Δ des points M du plan tels que :

$$\left\|5\overrightarrow{MA} + 10\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|9\overrightarrow{MB} + 6\overrightarrow{MC}\right\|$$

b) Γ des points M du plan tels que :

$$\left\|3\overrightarrow{MA} + 6\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right\| = \frac{13}{3}\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right\|$$

Solution



1) I = bar $\begin{matrix}A & B\\ 1 & 2\end{matrix}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow$ J = bar $\begin{matrix}B & C\\ 3 & 2\end{matrix}$

2) a) G ∈ (IC) $\Leftrightarrow$ G = bar $\begin{matrix}I & C\\ 3 & \gamma\end{matrix}$ $\Leftrightarrow$ G = bar $\begin{matrix}A & B & C\\ 1 & 2 & \gamma\end{matrix}$

G ∈ (JA) $\Leftrightarrow$ G = bar $\begin{matrix}A & J\\ \alpha & 5\end{matrix}$ $\Leftrightarrow$ G = bar $\begin{matrix}A & B & C\\ \alpha & 3 & 2\end{matrix}$

Donc, $\frac{\alpha}{1} = \frac{3}{2} = \frac{2}{\gamma}$; d'où $\alpha = \frac{3}{2}$.

Donc G = bar $\begin{matrix}A & B & C\\ \frac{3}{2} & 3 & 2\end{matrix}$ $\Leftrightarrow$ G = bar $\begin{matrix}A & B & C\\ 3 & 6 & 4\end{matrix}$

b) G = bar $\begin{matrix}A & B & C\\ 3 & 6 & 4\end{matrix}$ et 3 + 6 + 4 = 13

Donc, G = bar $\begin{matrix}A & B & C\\ \frac{3}{13} & \frac{6}{13} & \frac{4}{13}\end{matrix}$ et $\frac{3}{13} + \frac{6}{13} + \frac{4}{13} = \frac{13}{13} = 1$

3) G = bar $\begin{matrix}A & B & C\\ 3 & 6 & 4\end{matrix}$. Soit N = bar $\begin{matrix}A & C\\ 3 & 4\end{matrix}$

On a N ∈ (AC) et G = bar $\begin{matrix}N & B\\ 7 & 6\end{matrix}$

Donc N ∈ (AC) et N ∈ (BG)

D'où N = K ; donc K = bar $\begin{matrix}A & C\\ 3 & 4\end{matrix}$.

www.ipn.mr

4) a) on a I = bar $\frac{A\,|\,B}{5\,|\,10}$ et J = bar $\frac{B\,|\,C}{9\,|\,6}$ .Donc, M $\in \Delta$ si, et seulement si, $\left\|15\overrightarrow{MI}\right\| = \left\|15\overrightarrow{MJ}\right\|$

$\Leftrightarrow$ IM = MJ.

Donc, Δ est la médiatrice du segment [IJ]

b) On a G = bar $\frac{A\,|\,B\,|\,C}{3\,|\,6\,|\,4}$ et $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CI}$

donc M $\in \Gamma$ si, et seulement si, $\left\|13\overrightarrow{MG}\right\| = \frac{13}{3}\left\|3\overrightarrow{CI}\right\|$.

$\Leftrightarrow$ MG = IC. Donc, Γ est le cercle de centre G et de rayon IC.

Alignement

Exemple 17

SABCD une pyramide de base un parallélogramme ABCD. I est le milieu de [SA] : G est le centre de gravité du triangle BDS. Démontrer que les points I ; G ; C sont alignés.

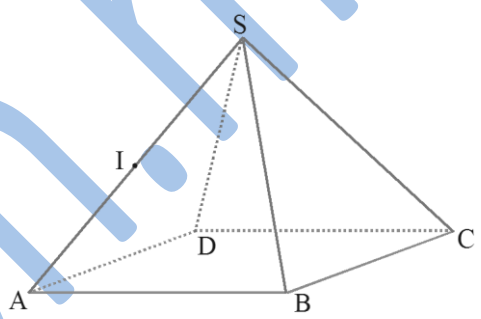
Solution

Comme ABCD est un parallélogramme, alors, C = bar $\frac{A\,|\,B\,|\,D}{-1\,|\,1\,|\,1}$

Donc, C = bar $\frac{A\,|\,S\,|\,S\,|\,B\,|\,D}{-1\,|\,-1\,|\,1\,|\,1\,|\,1}$

Or, bar $\frac{A\,|\,S}{-1\,|\,-1}$ = I et bar $\frac{S\,|\,B\,|\,D}{1\,|\,1\,|\,1}$ = G.

Donc, C = bar $\frac{I\,|\,G}{-2\,|\,3}$ d'où les points I; G ; C sont alignés.



Droites concourantes

Exemple 18

ABCD un tétraèdre. G_1 ; G_2 ; G_3 ; G_4 les centres de gravité respectifs des triangles ABC ; ABD ; ACD ; BCD. Démontrer que les droites (G_1D) ; (G_2C) ; (G_3B) ; (G_4A) sont concourantes.

Solution

On a : G_1= bar $\frac{A\,|\,B\,|\,C}{1\,|\,1\,|\,1}$; G_2 = bar $\frac{A\,|\,B\,|\,D}{1\,|\,1\,|\,1}$; G_3 = bar $\frac{A\,|\,C\,|\,D}{1\,|\,1\,|\,1}$; G_4 = bar $\frac{B\,|\,C\,|\,D}{1\,|\,1\,|\,1}$

Soit G = bar $\frac{A\,|\,B\,|\,C\,|\,D}{1\,|\,1\,|\,1\,|\,1}$

On a : G = bar $\frac{G_1\,|\,D}{3\,|\,1}$; G = bar $\frac{G_2\,|\,C}{3\,|\,1}$; G = bar $\frac{G_3\,|\,B}{3\,|\,1}$; G = bar $\frac{G_4\,|\,A}{3}$

Donc; G $\in$ (G_1D) ; G $\in$ (G_2C) ; G $\in$ (G_3B) ; G $\in$ (G_4A).

Donc, les droites (G_1D) ; (G_2C) ; (G_3B) ; (G_4A) sont concourantes en G.

k) Sommets d'un parallélogramme et barycentre

$ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si ;

$A = bar$

B	C	D
1	-1	1

$B = bar$

A	C	D
1	1	-1

$C = bar$

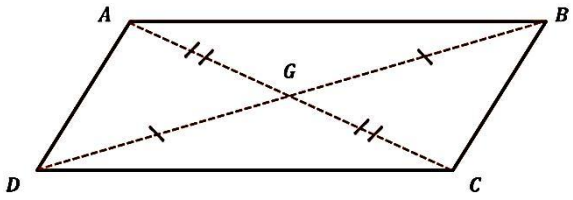
A	B	D

$D = bar$

A	B	C

www.ipn.mr

-1	1	1		1	-1	1



$G = bar$ | A | B | C | / | 1 | 1 | -1 | Si , et seulement si ;

Les point A, B, C et G sont les sommets d'un parallélogramme, dont G et C en sont des sommets opposés.

Exercice

Démontrer ces égalités.

l) Barycentre et géométrie analytique

Coordonnées du barycentre dans un repère

a- De deux points

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$;

Si $G = bar$ | A | B | / | α | β | $(\alpha + \beta \neq 0)$;

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{cases}$$

(Moyenne pondérée des coordonnées de A et B)

Exemple 19

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les deux points $A(5;\ -7)$ et $B(3; 4)$ tels que ;

$G = bar$ | A | B | / | 3 | 4 |

Calculer les coordonnées de G.

Solution

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{3 \times 5 + 4 \times 3}{3 + 4} = \dfrac{27}{7} \\ y_G = \dfrac{3 \times -7 + 4 \times 4}{3 + 4} = \dfrac{-5}{7} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{G\left(\frac{27}{7}; \frac{-5}{7}\right)}$$

b- De trois points

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$;

Si $G = bar$ | A | B | C | / | α | β | γ | $(\alpha + \beta + \gamma \neq 0)$;

www.ipn.mr

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \end{cases}$$

(Moyenne pondérée des coordonnées de A, B et C)

Exercice

Démontrer ces résultats.

Exemple 20

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les points $A(2;\ -3), B(-4;\ -5)$ et $C(6;\ -2)$ tels que ;

Si $G = bar$

A	B	C
7	-8	10

$(\alpha + \beta + \gamma \neq 0)$;

Solution

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{7 \times 2 - 8 \times (-4) + 10 \times 6}{7 - 8 + 10} = \dfrac{106}{9} \\ y_G = \dfrac{7 \times (-3) - 8 \times (-5) + 10 \times (-2)}{7 - 8 + 10} = \dfrac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{G\left(\frac{106}{9}; \frac{4}{9}\right)}$$

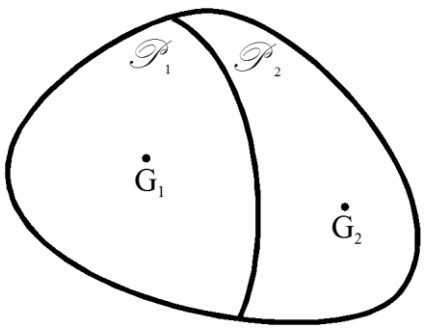
Remarque

Pour montrer que trois points distincts sont alignés, il suffit de montrer que l'un d'eux peut s'écrire comme barycentre des deux autres.

3. Centre d'inertie d'une plaque homogène

a) Principes généraux

Soit P une plaque d'épaisseur négligeable. Le centre d'inertie I de la plaque est l'isobarycentre de tous les points de la plaque. *(C'est donc un barycentre d'une infinité de points)*. Il s'agit d'une notion mathématique difficile à définir. Cependant, il est souvent facile de construire le centre d'inertie d'une plaque homogène grâce aux propriétés suivantes (*admise à notre niveau*).



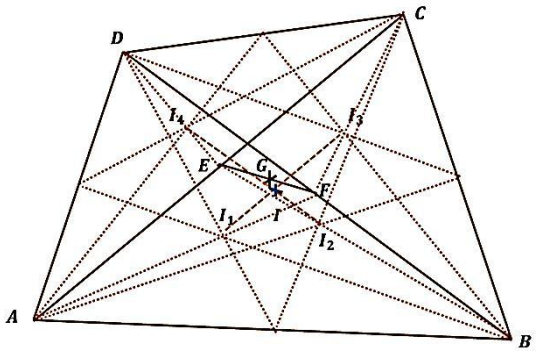
On donne quelques principes utilisés en physique concernant les centres d'inertie des plaques homogènes :

a) Cas simples

- Le centre d'inertie d'une tige homogène est le point milieu de cette tige.

www.ipn.mr

- Le centre d'inertie d'une plaque homogène triangulaire est le centre de gravité des sommets de ce triangle.
- **Attention !** Le centre d'inertie d'une plaque quadrilatère $ABCD$ est, en général différente de l'isobarycentre des sommets A, B, C et D.



b) Principes de symétrie

- Si la plaque admet un centre de symétrie I, le centre d'inertie est le point I.
- Si la plaque admet comme axe de symétrie la droite Δ, le centre de symétrie est sur la droite Δ.

c) Principes de juxtaposition et de décomposition

- Le centre d'inertie d'une juxtaposition de morceaux de tiges homogènes est le barycentre des centres d'inertie de ces morceaux de tige.
- Si une plaque P_1 d'aire a_1 a pour centre d'inertie I_1 et une plaque P_2 d'aire a_2 a pour centre d'inertie I_2, alors la plaque $P_1 \cup P_2$ admet pour centre d'inertie le barycentre G du système $(I_1,\ a_1)$ et $(I_2,\ a_2)$. Comme les plaques sont homogènes, leurs aires a_1 et a_2 sont proportionnelles à leurs masse m_1 et m_2, on a donc aussi *(d'après l'homogénéité des coefficients)* ;
  $G = bar\{(I_1,\ m_1);\ (I_2,\ m_2)\}$.
- Si la plaque $\mathbb{P}$ est décomposable en deux plaques $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$, alors le centre d'inertie G de la plaque $\mathbb{P}$ est le barycentre du système $\{(G_1, m_1);\ (G_2, m_2)\}$ où la plaque $\mathbb{P}_1$ a pour masse m_1 et pour centre d'inertie G_1, la plaque $\mathbb{P}_2$ a pour masse m_2 et pour centre d'inertie G_2.
- Si la plaque $\mathbb{P}$ est décomposable en plusieurs plaques, on lui applique le même principe.

Exercices généraux

Exercice 1

Construire le point $G = bar$

A	B
3	-2

Exercice 2

A et B sont deux points distincts.

Soit $F = bar$

A	B
2	1

Donner l'abscisse du point F dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB})$.

Exercice 3

A et B sont deux points distincts.

Donner les abscisses des points E, F et G dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB})$, sachant que ;

www.ipn.mr

$E = bar$

A	B
2	3

$F = bar$

A	B
-2	-3

$G = bar$

A	B
-2	3

Exemple 4

A et B sont deux points distincts.

Donner les abscisses des points F, G et H dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB})$, tels que ;

$F = bar$

A	B
2	5

$G = bar$

A	B
-3	5

$H = bar$

A	B
4	-1

Exercice 5

Construisons le point $G = bar$

A	B
-2	3

Exercice 6

Construire le point $G = bar$

A	B
-3	2

Exercice 7

Soit le triangle ABC.

On considère $G = bar$

A	B	C
1	1	2

Construire G

Exercice 8

ABC est un triangle non aplati.

$G = bar$

A	B	C

www.ipn.mr

	1	2	3

Construire G en utilisant la méthode des coordonnées de G dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, puis en utilisant la méthode de l'associativité (*barycentre partiel*).

Exercice 9

Soit ABC un triangle non aplati. En utilisant la méthode des barycentres partiels, construire le barycentre G du système $\{(A,3);\ (B,4);\ (C,5)\}$.

Problème d'alignement

Exercice 10

Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles non aplatis de centre de gravité respectifs G et G'.

1) Montrer que ; $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$
2) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $G = G'$.

Exercice 11

ABC est un triangle non aplati. I, J et K sont des points tels que ;

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}\ \ et\ \ \overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$$

1) Faire une figure ;
2) Démontrer que les droites (AJ),(BK) et (CI) sont concourantes.

Exercice 12

Soit ABC un triangle non aplati.

Et soit $I = bar$

A	B
1	2

Et $J = bar$

B	C
-1	3

Et $K = bar$

A	C
1	-6

1° Placer les points I, J *et* K ;

2° Montrer que (IC), (AJ) et (BK) sont concourantes.

Exercice 13

ABC est un triangle non aplati de centre de gravité le point G.

Soit $I = B * C$. La parallèle à (BC) passant par G coupe (AC) en E.

1° Placer le point D tel que ; $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$

2° Montrer que ; $E = bar$

A	C
1	2

3° Montrer que $B = A * D$

www.ipn.mr

4° Montrer que ; $I = bar$

A	D	C
1	1	2

En déduire que D, I et E sont alignés, puis préciser la position de I sur (DE).

Exercice 14

ABC est un triangle non aplati. D, E et F sont des points définis par les relations ;

$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{CB}$.

1° a) Exprimer D, E et F sous forme de barycentres ;

b) Placer D, E et F sur la figure ;

2° a) Montrer que D, E et F sont alignés ;

b) Exprimer $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$;

c) En utilisant le résultat $3\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CE} + 2\overrightarrow{CD}$,

Montrer que ; $B = bar$

C	D	E
3	2	1

3° (EB) coupe (CD) en G, préciser la position de G sur (CD).

Exercice 15

Soit ABC un triangle non aplati. On désigne par D le symétrique de B par rapport à A.

Soit $I = A * C$ et J le point tel que ;

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

1) Démontrer que D, I et J sont alignés ;
2) Faire une figure.

Exercice 16

ABC est un triangle non aplati.

I est le point tel que ;

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

D est le symétrique de B par rapport à A.

(BI) et (CD) se coupent en G.

La parallèle à (AB) menée de C coupe (BI) en H.

1) Faire une figure ;
2) A°/ Déterminer les réels α, β et γ tels que ;

$G = bar$

A	B	C
α	β	γ

B°/ Déterminer x, y et z tels que ;

$H = bar$

A	B	C
x	y	z

www.ipn.mr

Utilisation du barycentre pour résoudre des problèmes et dans les démonstrations

Problème de concours de droites

Exercice 17

ABC est un triangle non aplati, les points P, Q et R sont tels que ;

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}\ ; \qquad \overrightarrow{BQ} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}\ ; \qquad \overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

Montrer que les droites (AQ) ; (BR) et (CP) sont concourantes.

Problème de parallélisme de droites

Exercice 18

ABC est un triangle non aplati, les points E et F sont définis par ;

$$\overrightarrow{AE} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}\ ; \qquad \overrightarrow{AF} = \frac{7}{5}\overrightarrow{AC}$$

Montrer que les droites (CE) et (BF) sont parallèles.

Parallélisme de trois droites

Exercice 19

ABC est un triangle non aplati.

On donne $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$.

1°/ Montrer que le vecteur $\vec{u}$ est indépendant du choix du point M.

2°/ Soit $P = bar$

A	B
1	2

$Q = bar$

A	C
1	-3

$R = bar$

B	C
2	-3

Montrer que les droites ; (AR); (BQ) et (CP) sont parallèles.

Exercice 20

$ABCD$ est un carré de centre O.

I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.

On pose ;

$P = (AJ) \cap (DI)$; $\quad Q = (AJ) \cap (BK)$

$R = (CL) \cap (BK)$; $\quad S = (CL) \cap (DI)$

1°/ A) Faire une figure

B) Exprimer P comme ;

- **a)** Barycentre de A et J,
- **b)** Barycentre de D et I,
- **c)** Barycentre de A, B et C,
- **d)** Barycentre de A, B et D,

www.ipn.mr

2°/ Exprimer Q comme ;

- **a)** Barycentre de A et J,
- **b)** Barycentre de B et K,
- **c)** Barycentre de A, B et C,
- **d)** Barycentre de B, C et D,

3°/ Peut-on exprimer P, Q, R ou S comme barycentres des points A, B, C et D ?

4°/ En utilisant le point O, montrer que $PQRS$ est un carré.

Fonction vectorielle de Leibniz

Détermination du lieu géométrique

Exercice 21

ABC est un triangle non aplati.

1) Construire les points

$E = bar$

A	B	C
2	3	-1

$F = bar$

A	B	C
3	-2	1

2) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M tels que ;

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = 2\left\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|.$$

3) Déterminer et construire l'ensemble Π des point M tels que ;

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = 4.$$

Exercice 22

Soit A, B et C trois points fixés du plan $\mathcal{P}$.

A tout point M du plan $\mathcal{P}$ on associe les fonctions vectorielles ;

$\overrightarrow{f(M)} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

Et $\overrightarrow{g(M)} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

1°/ Calculer $\overrightarrow{f(A)}, \overrightarrow{f(B)}$ et $\overrightarrow{f(C)}$,

2°/ Soit $G = bar$

A	B	C
2	3	-1

Calculer $\overrightarrow{f(G)}$,

3°/ Exprimer $\overrightarrow{f(M)}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$,

4°/ Soit $F = bar$

A	B	C
1	3	1

Déterminer l'ensemble des points M tels que ;

$\left\|\overrightarrow{f(M)}\right\| = \left\|\overrightarrow{g(M)}\right\|$,

5°/ Déterminer l'ensemble des points M tels que ;

www.ipn.mr

$\left\|\overrightarrow{f(M)}\right\| = AB$ et $\left\|\overrightarrow{g(M)}\right\| = BC$.

Exemple 23

$ABCD$ est un carré de côté 5cm. On définit les fonctions suivantes ;

$$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$$

$$\overrightarrow{g(M)} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$$

1°/ Déterminer ; $\overrightarrow{f(A)}, \overrightarrow{f(B)}, \overrightarrow{f(C)}$ et $\overrightarrow{f(D)}$,

2°/ Déterminer $\overrightarrow{f(O)}$, O centre du carré,

3°/ Déterminer ; $\overrightarrow{g(A)}, \overrightarrow{g(B)}, \overrightarrow{g(C)}$ et $\overrightarrow{g(D)}$,

4°/ Soit $G = bar$

A	B	C	D
2	-1	4	-1

Déterminer $\overrightarrow{g(G)}$,

5°/ Déterminer puis construire les ensembles suivants ;

$$E_1 : \left\|\overrightarrow{f(M)}\right\| = 10\sqrt{2}$$

$$E_2 : \left\|\overrightarrow{f(M)}\right\| = 10$$

$$E_3 : \left\|\overrightarrow{f(M)}\right\| = \left\|\overrightarrow{g(M)}\right\|$$

6°/ Faire une figure.

Barycentre et géométrie analytique

Exercice 24

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$ et $C(2, -4)$ et soit les points ;

$$P\left(\frac{11}{6}, 0\right) ; Q\left(8, \frac{-11}{2}\right) ; \mathrm{R}(-5, -7).$$

1°/ Montrer que ; $P = bar$

A	B	C
1	2	3

2°/ Montrer que ; $Q = bar$

A	B	C
-2	1	3

3°/ Montrer que ; $R = bar$

A	B	C
1	-1	1

4°/ Quelle est la nature du quadrilatère $ABCR$?

Exercice 25

Etant donné un triangle ABC non aplati et un réel k, on considère les points $A'; B'$ et C' tels que ;

www.ipn.mr

$$\overrightarrow{AB'} = k\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{BC'} = k\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{CA'} = k\overrightarrow{CA}\,.$$

Démontrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité.

Exercice 26

On se donne un triangle ABC non aplati et un point O vérifiant ;

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}\ et\ OA = OB = OC.$$

Montrer que le triangle ABC est équilatéral en montrant que les médianes sont aussi les médiatrices.

Exercice 27

On se donne un triangle ABC non aplati.

Pour tout point M de $\mathcal{P}$ on pose ;

$$\overrightarrow{f(M)} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

1° P désignant un point quelconque de $\mathcal{P}$, prouver que ;

$$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(P)}\ (f\ constante)$$

2° Construire G_1 barycentre de $(B;\ -3)\ et\ (C;1)$

Montrer que ; $\overrightarrow{f(M)} = 2\overrightarrow{G_1A}$.

3° Construire G_2 barycentre de $(A;\ 2)\ et\ (C;1)$

Montrer que ; $\overrightarrow{f(M)} = 3\overrightarrow{BG_2}$.

4° On désigne par G_3 le barycentre de $(B;\ -3)\ et\ (A;2)$. Montrer que les droites ;

$$(AG_1)\ ;\ (BG_2)\ et\ (CG_3)\ \text{sont parallèles.}$$

5° En déduire une construction de G_3.

Exercice 28

Etant donné un triangle ABC non aplati, construire les points I, J et K définis par ;

- I est le barycentre de $(A\,;2)\ et\ (C\,;1)$;
- J est le barycentre de $(A\,;1)\ et\ (C\,;2)$;
- K est le barycentre de $(C\,;1)\ et\ (B\,;-4)$.

1° Démontrer que B est le barycentre de $(K\,;3)\ et\ (C\,;1)$.

2° Quel est le barycentre de $(A\,;2), (K\,;3)\ et\ (C;1)$?

3° Déduire du 2° que I, J, K sont alignés et que J est le milieu de $[IK]$.

4° L étant le milieu de $[CI]$, et M celui de $[KC]$, démontrer que $IJML$ est un parallélogramme dont le centre G est l'isobarycentre de A, B, C.

Exercice 29

On se donne deux points A et B distints, deux réels α et β ($\alpha + \beta \neq 0\ et\ \beta \neq 0$) et un vecteur $\vec{u}$ non nul. I est le barycentre de $(A;\ \alpha)\ et\ (B;\ \beta)$.

1° M_0 étant un point fixé, construire N_0 tel que I soit le barycentre de $(M_0;\ \alpha)\ et\ (N_0;\ \beta)$.

2° Un point M décrit la droite Δ passant par M_0 et de vecteur directeur $\vec{u}$.

On désigne par N les point tel que I soit le barycentre de $(M;\ \alpha)\ et\ (N;\ \beta)$.

www.ipn.mr

Quel est l'ensemble des points N ?

Exercice 30

1° On désigne par ABC un triangle non aplati et par G le barycentre de $(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)$

$$(\alpha+\beta+\gamma\neq 0)$$

Donner les coordonnées de G dans le repère (A,B,C).

2° Un point M a pour coordonnées (x,y) dans le repère (A,B,C). Déterminer $\alpha,\beta\ et\ \gamma$ de façon que M soit le barycentre $(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)$ et que $\alpha+\beta+\gamma=1$.

3° Quel est l'ensemble $\mathcal{D}$ des points G barycentres de $(A;\alpha),(B;2\alpha),(C;1-3\alpha)$ lorsque α décrit $\mathbb{R}$?

4° Donner l'équation de $\mathcal{D}$ dans le repère (A,B,C).

Exercice 31

Dans chacun des cas suivants, construire les barycentres indiqués.

1) [AB] un segment ; G = bar

2) [AB] un segment ; I = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2 & -1 \end{array}$; J = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -1 & 2 \end{array}$

Montrer que les segments [AB] et [IJ] ont même milieu G.

3) ABC un triangle ; I = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -2 & 3 \end{array}$; J = bar $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 1 & 4 \end{array}$

K = bar $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 1 & -2 \end{array}$

Exercice 32

Soit A et B deux points du plan. Construire les points suivants :

G_1 = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 2 \end{array}$ G_2 = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -3 & 2 \end{array}$; G_3 = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & -3 \end{array}$

Exercice 33

Exprimer le point G comme barycentre des points A et B dans chacun des cas :

$$1)\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\ ;\ 4)\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ 7)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\vec{0}$$

$$2)\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AB}\ ;\ 5)\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\ \ 8)3\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{AG}=\vec{0}$$

$$3)\overrightarrow{AG}=\frac{-2}{5}\overrightarrow{AB}\ ;6)\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\ 9)\text{-}2\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{AG}=\vec{0}$$

Exercice 34

Dans les cas suivants exprimer G comme barycentre des points A et B.



www.ipn.mr

Exercice 35

ABC un triangle, I, J , K les points tels que :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

1) Faire une figure.

2) Compléter les tableaux :

I = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline & \end{array}$; J = bar $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline & \end{array}$; K = bar $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline & \end{array}$

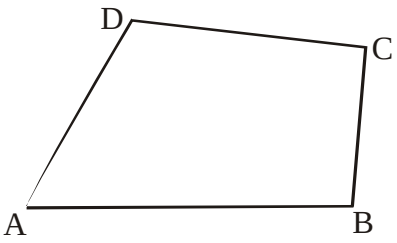
Exercice 36

ABC trois points tels que : $5\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

1) Exprimer A comme barycentre des points B et C.

2) Exprimer B comme barycentre des points A et C.

3) Exprimer C comme barycentre des points A et B.



Placer le point G sachant qu'il est barycentre des points A et C d'une part et des points B et D d'autre part.

Justifier.

Exercice 37

A et B deux points distincts, déterminer le réel x dans chacun des cas :

1) bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ 2 & 3 \end{array}$ = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ 10 & x \end{array}$

2) bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ 1 & 3 \end{array}$ = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ x+2 & x-3 \end{array}$

1) bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ 2 & 3 \end{array}$ = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ 10 & x \end{array}$

3) bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ 2x+1 & x-3 \end{array}$ est le milieu de [AB].

Exercice 38

A et B deux points distincts donnés dans le plan. D est une droite dans le plan ;

Déterminer l'ensemble (E) des barycentre des points A et B, appartenant à D.

www.ipn.mr

Exercice 39

ABC un triangle ; I milieu de [AB].

$H = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 1 & 1 & 2 \end{array}$; $Z = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 1 & 1 & -1 \end{array}$

1) Faire une figure.

2) Soit G le centre de gravité du triangle ZAH.

Exprimer G comme barycentre des points A ; B ; C.

Exercice 40

ABC un triangle $I = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ 1 & 3 \end{array}$; $J = \text{bar}\begin{array}{c|c} B & C \\ 2 & 3 \end{array}$

$K = \text{bar}\begin{array}{c|c} C & A \\ 1 & -2 \end{array}$

Les droites (AJ) et (BK) se coupent en G_1

Les droites (AJ) et (CI) se coupent en G_2

Les droites (BK) et (CI) se coupent en G_3.

Placer les points cités sur une figure.

Exprimer chacun des points G_1 ; G_2 ; G_3 comme barycentre des points A ; B ; C.

Exercice 41

ABCD un quadrilatère dans le plan. G est l'isobarycentre des points ABC. O est l'isobarycentre des points A ; B ; C ; D.

Montrer que les points O ; G ; D sont alignés.

Exercice 42

ABC un triangle. $I = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ 1 & 2 \end{array}$; $J = \text{bar}\begin{array}{c|c} B & C \\ -1 & 3 \end{array}$

$K = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & C \\ 1 & -6 \end{array}$

1) Placer les points cités sur une figure.

2) Démontrer que les droites (IC) ; (JA) et (KB)

sont concourantes.

Exercice 43

ABC un triangle non aplati. $I = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ 2 & 1 \end{array}$

$J = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & C \\ 3 & 2 \end{array}$

Les droites (IC) et (JB) se coupent en G.

www.ipn.mr

On muni le plan du repère (A ; B ; C).

1) a) Donner les coordonnées de chacun des points

A ; B ; C ; I ; J.

b) Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (IC) et (JB).

c) en déduire les coordonnées du point G.

2) Exprimer G comme barycentre des points A ; B ; C.

Exercice 44

ABC un triangle. D est symétrique de A par

rapport au milieu de [BC]. I = bar $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 2 \end{array}$

La parallèle à (AD) passant par B coupe (IC) en G.

1) Faire une figure.

2) Exprimer G comme barycentre des points A ; B ; C.

3) Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|-3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|$.

4) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right\|$.

Exercice 45

Soit A ; B ; C trois points donnés. M étant un point quelconque, exprimer chacun des vecteurs suivants en fonction de $\overrightarrow{MG}$ ou G est un point à préciser.

1) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$; 4) $\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MB}$

2) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$; 5) $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

3) $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$; 6) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$

Exercice 46

Soit A ; B ; C trois points donnés. M étant un point quelconque, déterminer le vecteur indiqué dans chacun des cas suivants :

1) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$; 3) $3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$

2) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$; 4) $-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}$

Exercice 47

ABC un triangle. t est un réel.

Soit G_t le barycentre du système $\{(A\ ;\ 2t+1)\ ;\ (B\ ;\ -t)\ ;\ (C\ ;\ 1)\}$

1) Déterminer l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles le point G_t est défini.

www.ipn.mr

2) Le point G_t peut-il être

a) l'un des sommets du triangle ABC ?

b) situé sur l'une des droites (AB) ; (AC) ; (BC) ?

c) centre de gravité de ABC ?

3) Construire G_0 ; G_{-1} ; G_1

Exercice 48

ABC un triangle. m un réel.

On pose :

$G_m = \text{bar}\{(A\ ;\ 1)\ ;\ (B\ ;\ m)\ ;\ (C\ ;\ -m)\}$

$H_m = \text{bar}\{(A\ ;\ 1-2m);(B\ ;\ m);\ (C\ ;\ m)\}$

1) a) Montrer que les point G_m et H_m existent

pour toute valeur de m.

Que peut-on dire des points G_0 et H_0.

b) Pour $m \neq 0$, peut-on avoir $G_m = H_m$?

2)a) Déterminer et construire le lien géométrique du point G_m lorsque m varie dans $\mathbf{R}$.

b) Déterminer et construire le lien géométrique du point H_m lorsque m varie dans $\mathbf{R}$.

www.ipn.mr